Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования «Белорусский государственный университет   
информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра информатики

Дисциплина: Прикладные задачи математического анализа

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

к курсовой работе

на тему

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ, ЕГО СВОЙСТВА И ПРИЛОЖЕНИЯ

БГУИР КП 1-40 04 01

Студент: гр.253504

Фроленко Кирилл Юрьевич

Руководитель: канд. ф.-м. н., Анисимов В.Я.

Минск 2023

**Содержание**

Введение3

1. Теоретическая часть4

1.1 Интеграл Фурье4

1.2 Косинус- и синус- преобразования Фурье 5

1.3 Комплексная форма интеграла Фурье 7

1.4 Преобразование Фурье 7

1.5 Геометрическая интерпретация преобразование Фурье 8

1.6 Некоторые свойства преобразование Фурье 11

1.7 Преобразование Фурье к решению дифференциальных уравнений 14

1.8 Инструменты для работы с преобразованием Фурье в СКА Maple 15

2. Практическая часть17

3. Решение примеров при помощи Maple24

4. Выводы29

5. Список использованных источников30

**ВВЕДЕНИЕ**

Преобразование Фурье – это мощный математический инструмент, который нашел широкое применение в различных областях науки и техники. Оно было разработано французским математиком Жан-Батистом Жозефом Фурье в начале XIX века и стало одним из фундаментальных понятий в современном анализе и физике.

Жан-Батист Фурье был известен своими исследованиями в области теплопроводности и распространения тепла. Его работа над разложением функций в ряды тригонометрических функций позволила ему разработать теорию распространения тепла в твердых телах. Фурье показал, что любая периодическая функция может быть представлена суммой синусов и косинусов различных частот, что привело к созданию ряда Фурье.

Преобразование Фурье, основанное на ряде Фурье, позволяет анализировать функции в частотной области. Оно позволяет разложить сложную функцию на составные части различных частот и определить их вклад в исходную функцию. Это преобразование нашло широкое применение в сигнальной обработке, обработке изображений, криптографии, оптике и других областях.

Преобразование Фурье играет значительную роль и в обработке звука. Наше восприятие звука связано с его спектральным составом, и преобразование Фурье позволяет разложить сложные звуковые сигналы на отдельные компоненты различных частот. Это имеет важное значение в акустике, аудио-инженерии и обработке речи.

Как сказал лорд Кельвин в 1867 году: "теорема Фурье - одна из самых великих открытий в истории науки". Преобразование Фурье и связанные с ним математические методы дали нам новые инструменты для анализа сложных систем, решения дифференциальных уравнений и интерпретации экспериментальных данных. Сегодня преобразование Фурье является неотъемлемой частью современной науки и технологии, играя ключевую роль во многих областях и продолжая вносить существенный вклад в наше понимание мира.

1. **ТЕОРИТЕЧЕСКАЯ ЧАСТЬ**
   1. **Интеграл Фурье**

Теорема Фурье: пусть функция : 1) определена на всей числовой оси; 2) является кусочно-гладкой в каждом конечном промежутке; 3) абсолютно интегрируема на всей числовой оси. Тогда имеет место формула

(1)

Произведем в интеграле в левой части равенства (1) замену . Тогда получим формулу Фурье

(2)

Так как

(3)

То формула (2) приводится к виду

(4)

Существует интеграл

(5)

Равномерно сходящиеся по . Поэтому справедливо равенство

(6)

Из равенств (5) и (6) можем получит формулу двойного интеграла Фурье функции f(x):

(7)

Таким образом, если функция абсолютно интегрируема на и удовлетворяет условиям Дирихле, то для нее справедлива формула (7). В частности, если непрерывна в точке , то

(8)

* 1. **Косинус- и синус- преобразования Фурье**

Преобразуем интеграл Фурье (8) к виду

(9)

Введем обозначения

(10)

(11)

Тогда

(12)

Формула (12) также называется интегралом Фурье. Интегралы (10) и (11) понимаются в смысле главного значения. Они похожи на коэффициенты и ряда Фурье функции . Интеграл же (12) по форме записи сходен с рядом Фурье.

Пусть – четная функция, удовлетворяющая условиям представления ее интегралом Фурье. Тогда в смысле главного значения

(13)

так как четная, а – нечетная по функция.

Следовательно, интеграл Фурье (12) принимает вид

(14)

Аналогично, если — нечетная функция, то

(15)

и тогда

(16)

Формулы (14) и (16) называются интегралами Фурье для четной и нечетной функций соответственно, а формулы (13) и (15) – косинус- и синус- преобразованиями Фурье соответственно. Интеграл (8) и частные случаи (14) и (16) характеризуют разложение непериодической функции на сумму гармонических составляющих с частотами 𝜔, непрерывно изменяющимися от 0 до .

Для симметризации записи введем обозначения

(17)

(18)

Тогда и вместо формул (14) и (16) получим:

(19)

(20)

Функции и также называются косинус- и синус- преобразованиями Фурье соответственно.

* 1. **Комплексная форма интеграла Фурье**

Формула

(21)

называется комплексной формой интеграла Фурье. Заметим, что если в точке функция имеет разрыв первого рода, то формула (21) принимает вид

(22)

* 1. **Преобразование Фурье**

Перепишем интеграл Фурье (21) в виде

(23)

Обозначим

(24)

тогда

(25)

Функция называется преобразованием Фурье или спектральной характеристикой функции . Функция , определяемая равенством (25), называется обратным преобразованием Фурье; функция – комплексной гармоникой. Очевидно, спектральная характеристика является комплексной амплитудой гармоники .

Таким образом, интегральное представление (25) функции можно понимать как представление в виде бесконечной непрерывной системы колебаний частоты и амплитуды Функция называется амплитудным частотным спектром функции

Замечание 1. Если функция в точке имеет разрыв первого рода, то равенство (25) должно быть записано в виде

*(26)*

Замечание 2. Другая комплексная форма интеграла Фурье:

(27)

из которой следует, что прямое преобразование Фурье имеет вид

(28)

а обратное — вид

(29)

– прямое преобразование Фурье, – обратное преобразование Фурье.

Замечание 3. Если для функции существует то будем говорить, что функция преобразуема по Фурье.

* 1. **Геометрическая интерпретация преобразования Фурье**

Рассмотрим гармонический сигнал, совершающий 3 колебания в секунду (рис. 1).

(30)

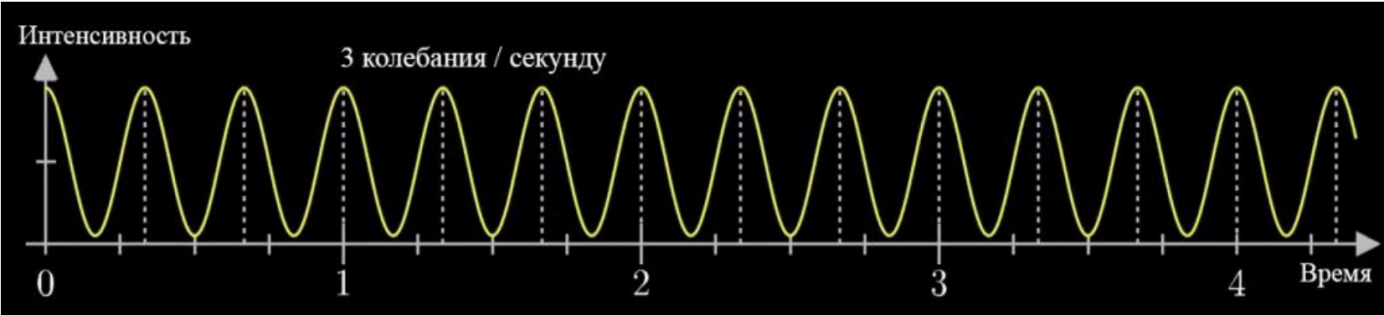


Рисунок 1 – Гармонический сигнал с частотой 3 Гц

Отобразим на комплексную плоскость. Для этого введём радиус-вектор, который равномерно вращается по часовой стрелке. Его длина в каждый момент времени равна модулю значения сигнала, а частота вращения выбирается произвольным образом.

Теперь построим траекторию движения конца вектора, совершающего полный оборот за две секунды, или, другими словами, с частотой вращения 5 Гц (рис. 2).

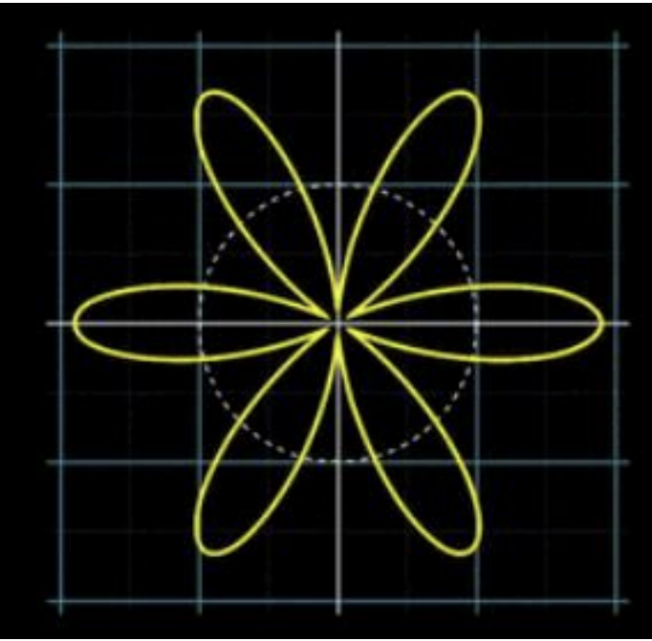


Рисунок 2 – “Намотка” с частотой вращения 5 Гц

Выглядит, будто исходный сигнал намотан на начало координат. В минимумах сигнала полученная "намотка" сливается с началом координат, а при приближении к максимумам – отклоняется.

Сначала график распределяется довольно симметрично относительно начала координат до частоты вращения 3 Гц (рис. 3). Затем максимумы резко смещаются в правую полуплоскость, а намотка перестаёт напоминать узор спирографа.

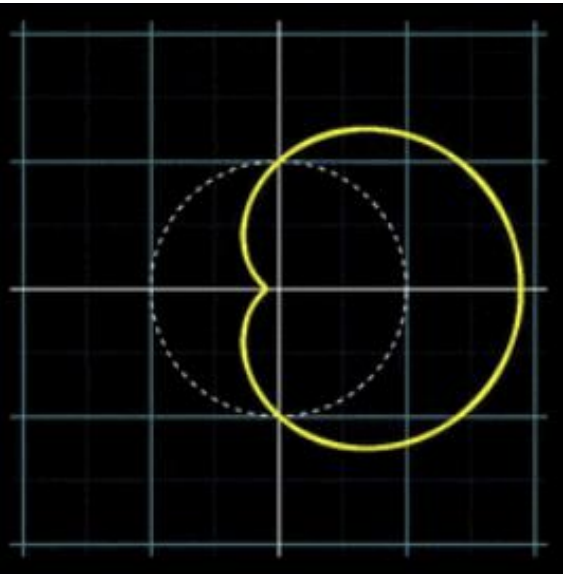
****

Рисунок 3 – “Намотка” с частотой вращения 3 Гц

В качестве характеристики намотки возьмём усреднённое значение всех её точек – центр масс.

Строим зависимость положения центра масс от частоты намотки. Сейчас нам достаточно рассмотреть х-координату (рис. 4).

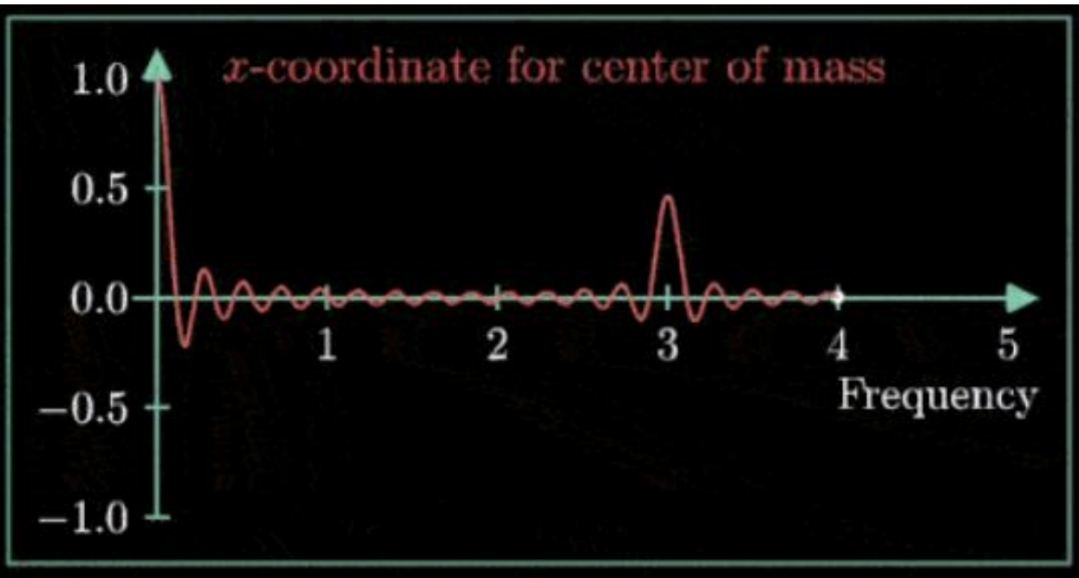
****

Рисунок 4 – Зависимость х-координаты центра масс от частоты намотки

Мы видим два пика: в точках 0 об/с и 3 об/с. На основании такого поведения центра масс уже можно судить о частоте исходного сигнала (он колеблется с частотой 3 Гц). Всплеск на низких частотах появляется из-за смещения графика вверх на 1 относительно оси абсцисс. Это важный момент при использовании преобразования Фурье: смещение проявляется на низких частотах, потому их исключают из исходного сигнала.

Отображение исходного сигнала на комплексную плоскость позволяет рассматривать точки на плоскости как комплексные числа и использовать формулу Эйлера для описания обмотки:

(31)

Геометрически это соотношение означает, что при любом точка на комплексной плоскости лежит на единичной окружности.

Тогда намотка сигнала описывается как .

Теперь вычисляем центр масс. Для этого отметим N произвольных точек на графике намотки и вычислим среднее:

(32)

Увеличивая количество рассматриваемых точек, придем к предельному случаю:

(33)

где и – границы интервала, на котором рассматривается сигнал.

Выражение перед интегралом представляет собой масштабирующий коэффициент, но не отражает поведение центра масс. Потому его можно отбросить.

*.* (34)

Выражение (34) и будет являться преобразованием Фурье с той разницей, что в общем виде интегрирование задаётся на интервале от до . Такой переход к бесконечному интервалу означает, что мы не накладываем никаких ограничений на длительность рассматриваемого сигнала.

* 1. **Некоторые свойства преобразования Фурье**

Рассмотрим основные свойства преобразования Фурье.

**Линейность.** Рассмотрим функции и , имеющие спектры и :

(35)

Тогда спектр их линейной комбинации будет:

(36)

**Задержка во времени.** Считаем, что известен спектр сигнала

(37)

Рассчитаем спектр сигнала, сдвинутого во времени: x(t – τ). Обозначим аргумент функции новой переменной, тогда и

(38)

Получили, что задержка сигнала на время τ приводит к умножению спектра на .

**Изменение масштаба.** Считаем, что известен спектр сигнала как через выражается спектр сигнала. Вводим новую переменную , делаем замену переменной интегрирования

(39)

**Умножение на** . Как и в предыдущем случае, считаем, что известен спектр сигнала . Найдем спектр этого сигнала, умноженного на .

(40)

Таким образом, умножение сигнала на приводит к смещению спектра на .

**Спектр производной.** В данном случае ключевым моментом является абсолютная интегрируемость функции. Из того, что интеграл от модуля функции должен быть ограничен, следует, что на бесконечности функция должна стремиться к нулю. Интеграл от производной функции берётся по частям, получившиеся слагаемые вне интеграла равны нулю, так как на бесконечности функция стремится к нулю.

(41)

**Спектр интеграла**. Найдем спектр сигнала . Причём будем считать, что , то есть у сигнала отсутствует постоянная составляющая. Это требование необходимо, чтобы слагаемые вне интеграла были равны нулю, когда интеграл берётся по частям.

(42)

**Теорема о свёртке**. Известно, что и спектры функций и соответственно. Требуется выразить спектр свертки через и . Для этого в интеграле Фурье от свёртки у одной из функций выполним замену переменой , тогда в показателе экспоненты можно сделать замену В результате такой замены двукратный интеграл будет равен произведению двух интегралов Фурье.

(43)

Преобразование Фурье свёртки двух сигналов даёт произведение спектров этих сигналов.

**Произведение сигналов**. Известно, что и – спектры функций и соответственно. Требуется выразить спектр произведения через спектры . Подставим в интеграл Фурье вместо одного из сигналов, например , его выражение через обратное преобразование Фурье, а потом поменяем порядок интегрирования.

(44)

Спектр произведения сигналов есть свёртка спектров этих сигналов

* 1. **Приложение преобразования Фурье к решению дифференциальных уравнений.**

Рассмотрим неоднородное линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

(45)

в котором и абсолютно интегрируемы на всей числовой оси функции. Перейдем в этом уравнении к преобразованию Фурье. Считая, что существуют преобразования и , получаем

, (46)

или

*.* (47)

Таким образом, дифференциальное уравнение преобразовалось в алгебраическое уравнение первой степени относительно неизвестного преобразования Фурье . Отношение называется передаточной функцией и обозначается Эта функция играет большую роль в теории электрических цепей, автоматического управления и других технических приложениях. Таким образом, имеем

(48)

откуда

(49)

Функция является преобразованием Фурье решения дифференциального уравнения. Воспользовавшись теперь обратным преобразованием Фурье, найдем это решение, т. е.

Таким образом, дифференциальное уравнение формально решено. Однако применение преобразования Фурье к решению этого уравнения ограничено в силу того, что частные решения линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами содержат слагаемые вида , , и т.д., которые не являются абсолютно интегрируемыми функциями на всей числовой оси, а значит, не преобразуемыми по Фурье.

* 1. **Инструменты для работы с преобразованием Фурье в СКА Maple**

Для вычисления преобразования Фурье функции используется команда . Команда принимает параметры , где — преобразуемая функция, — переменная, по которой ведется преобразование, — параметр преобразования, т.е. переменная, функцией которой будет являться преобразование. Также есть параметр для дополнительных условий. Преобразованы могут быть самые разные функции, содержащие комплексные экспоненты, полиномы, тригонометрические выражения, другие функции, а также производные и интегралы. Также пользователь может добавлять свои собственные функции в справочную таблицу с помощью команды . В первую очередь при выполнении преобразования программа пытается идентифицировать функцию из этой таблицы. Далее перебираются различные случаи, такие как кусочная декомпозиция, суммы, рациональные полиномы. Если ничего не подойдет, то в конечном итоге программа прибегнет к интегрированию. Однако если выставлен параметр , то интегрирования не произойдет. Это может помочь для увеличения скорости, с которой программа выполняет преобразование. Для обратного преобразования Фурье используется команда . Она обладает теми же свойствами, что и . Также существует несколько команд для преобразования сигнала, такие как:

* — вычисляет дискретное преобразование Фурье для массива точек данных сигнала. Применяется для массивов любых размеров.
* — похожа на первую команду, но использует алгоритм быстрого преобразования Фурье. Применяется для массивов с размерностью не меньше 2. Если массив одномерный, то будет произведено дискретное преобразование Фурье.
* — похожа на первую команду, но имеет некоторые дополнительные опции, недоступные в .
* Чаще всего и работают немного более эффективно чем .

**Практическая часть.**

**Преобразование Фурье**

***Пример 1***. *Найти преобразование Фурье для функции*

Так как функция четная,

***Пример 2.*** *Найти преобразование Фурье для функции*

Так как функция нечетная,

Возьмем данный интеграл по частям:

Поставим и получим результат в i и получим:

***Пример 3.*** *Найти преобразование Фурье для функции*

*и ее частного случая*

Так как функция четная, . Так же обратим внимание на важную формулу

Применяем ее для нашей задачи.

*.*

Для частного случая, когда получаем . Таким образом, преобразование Фурье переводит функцию в нее же саму.

**Интеграл Фурье.**

***Пример 1***. *Представить интегралом Фурье функцию*

Найдем коэффициенты . Так как функция четная, то

Подставляем в формулу интеграла и получаем ответ

***Пример 2****.* *Представить интегралом Фурье функцию*

*, где*

В данном примере используется функция знака , что показывает какой знак имеет аргумент.

Найдем коэффициенты . Так как функция нечетная, то

Подставляем в формулу интеграла и получаем ответ

***Пример 3****.* *Представить интегралом Фурье функцию*

Найдем коэффициенты . Так как функция четная, то

Подставляем в формулу интеграла и получаем ответ

*.*

**Свойства преобразований Фурье.**

***Пример 1.*** *Доказать, что*

*.*

Положим

Тогда

Таким образом,

И по теореме о свёртке

***Пример 2****. Найти решение уравнения*

При ,, удовлетворяющие начальному условию

Применим к новому уравнению преобразование Фурье. Умножим обе части на . И проинтегрируем его по от до .

Тогда

Или

,

где - Фурье-образ функции.

Здесь использовалась формула для Фурье-образа производной второго порядка:

(

Равенство, что мы получили выше – обыкновенное линейное

дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции переменной *,* где - параметр.

Переходя к Фурье-образам в равенстве получаем начальное условие для нашего уравнения:

Решением задачи Коши является функция:

Далее найдём h(x,t) прообраз функции :



По теореме о свёртке

или

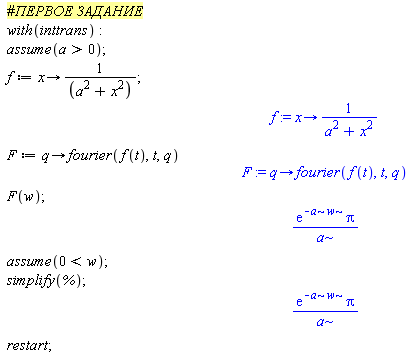
Решение, что было получено выше, называется интегралом Пуассона.

**Решение примеров при помощи Maple**

Maple является системой аналитических вычислений, предназначенной для облегчения решения не только математических задач, но также инженерных, финансовых, экономических и технических, требующих привлечения разнообразного математического аппарата. Пользователем данной системы может быть любой человек, владеющий математикой в пределах необходимых ему знаний для решения задач проблемной области. Это может быть инженер, занимающийся расчетом конструкций, финансист, следящий за потоками денежных масс на предприятии, математик, использующий Maple для облегчения своей работы, и т.д.

Система Maple работает под управлением операционной системы Windows 95, и ее интерфейс пользователя является стандартным для программ, разработанных для выполнения под управлением этой операционной системы: меню, панели инструментов, рабочая область, возможность загрузки нескольких документов Maple в одном сеансе работы и т.д. Пользователь с помощью клавиатуры набирает команды (функции) в рабочем поле, которые передаются на обработку основному компоненту системы, называемому ядром системы. Названия, или имена команд и функций соответствуют тем действиям, которые они выполняют, что достаточно удобно как для новичка, так и для специалиста. Любая введенная пользователем правильная команда Maple немедленно интерпретируется исполняющей системой, и пользователь сразу же видит результат.

Кроме непосредственного ввода последовательности необходимых команд для решения задачи, Maple предоставляет собственный язык программирования, операторы которого похожи на операторы любого языка программирования высокого уровня. Это позволяет создавать собственную последовательность действий для решения конкретной часто выполняемой задачи и оформить ее в виде процедуры, которую впоследствии можно вызывать в любое время, операторы которого похожи на операторы любого языка программирования высокого уровня.



Итак, в начале для работы с преобразованиями Фурье, интегралом Фурье и свойствами Фурье мы должны подключить пакет функций, необходимых для решения поставленной задачи.

Далее, следующей строкой, мы указываем, что параметр у нас положительный. И задаем нашу функцию, для которой хотим найти Фурье-образ

Следующей строкой мы определяем наш Фурье-образ при помощи функции из подключенного пакета.

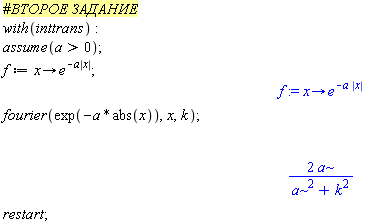
Команда , где − переменная, по которой производится преобразование, −имя переменной, которое следует присвоить параметру преобразования, помогает нам в этом.

Так же можно вычислить обратное преобразование Фурье при помощи команды

Команда предназначена для упрощения разнообразных выражений, составленных из чисел, переменных и элементарных функций.

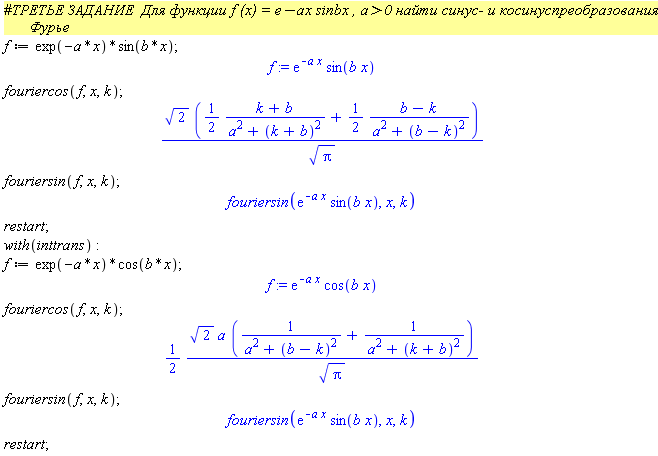
И, в конце, команда **;** полностью очищает внутреннюю память Maple от всех определений, которые мы совершили в процессе работы. Фактически, применение команды **;** открывает новую Maple-сессию.

Итак, мы получили долгожданный ответ. Далее будут приведены другие примеры, однако функции для решения будут использоваться те же.



В следующем примере мы должны были найти преобразование Фурье для функции

И, как мы видим из результата, что нам вывела программа, ответ был подсчитан правильно.



В следующем примере уже используются немного другие функции из подключенного пакета, так как перед нами стоит другая задача.

А именно:

Для функции найти синус- и косинус- преобразования Фурье.

Поскольку формулы синус-преобразования Фурье симметричны относительно замены на , то в эти преобразования вычисляются одной командой, но с различным порядком указания параметров:

вычисляет прямое синус-преобразование Фурье;

− вычисляет обратное синус-преобразование Фурье.

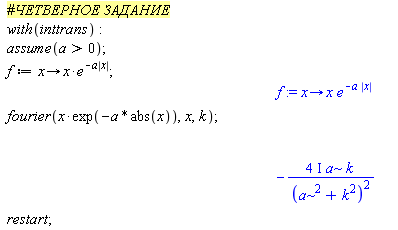
Аналогично, прямое и обратное косинус-преобразования Фурье функции определяются формулами:

−вычисляет прямое косинус-преобразование Фурье;

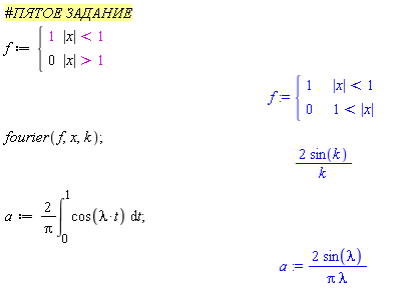
−вычисляет обратное косинус-преобразование Фурье.

В данном примере мы вычислили синус и косинус преобразования и для

функции

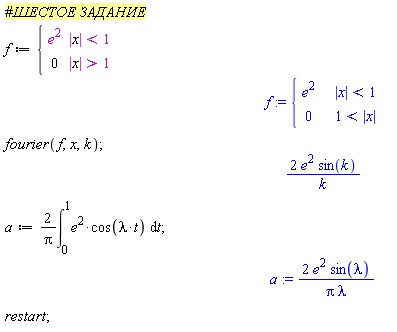


В следующем задании мы опять находили преобразования Фурье.



В данном примере мы представляем функцию, указанную выше, интегралом Фурье. Так как данная функция четная, то , осталось вычислить . В данном примере мы вычислим его и при помощи функций Maple, и при помощи формулы.

Из информации выше видно, что ответ и при функции, и при формуле одинаковый. Так что можем считать, что решение выполняется верно. Проанализируем на других примерах.



Опять же, мы представляем функцию, указанную выше, интегралом Фурье. Так как данная функция четная, то , осталось вычислить Из информации выше видно, что ответ и при функции, и при формуле одинаковый. Так что можем считать, что решение выполняется верно.

**Выводы**

В данной курсовой работе были исследованы основные концепции, связанные с интегралами, свойствами и преобразованием Фурье, а также их практическое применение для решения различных задач. Было осуществлено решение примеров с использованием компьютерной программы Maple и ее встроенных пакетов.

Изучение данной темы раскрывает ряд вопросов, связанных с решением сложных уравнений физики, особенно в динамических процессах, возникающих под воздействием электрической, тепловой или световой энергии. Преобразования Фурье широко применяются во многих научных областях. В некоторых случаях они служат средством решения сложных уравнений, описывающих динамические процессы. В других случаях преобразование Фурье позволяет выделять регулярные составляющие в сложных колебательных сигналах, что помогает правильно интерпретировать экспериментальные наблюдения в астрономии, медицине и химии.

В настоящее время изучение преобразования Фурье сосредоточено на разработке эффективных методов перехода между функциями и их преобразованным видом, а также обратно. Такие методы имеют важное значение для анализа и обработки данных в различных областях науки и техники.

Таким образом, данная работа представляет обширное исследование темы преобразования Фурье, отражая его значимость и широкий спектр применения в различных научных и инженерных областях.

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

[1] Волков В. А. Ряды Фурье. Интегральные преобразования Фурье и Радона : учебно-методическое пособие / В. А. Волков ; [науч. ред. Р. М. Минькова]. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2014. – 32 с. – ISBN 978-5-7996-1252-8.

[2] Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика, Часть 3. Москва, 1985. [3] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: Наука, 1981. 544 с.

[4] Семенчук Н.П., Сендер Н.Н. Ряды Фурье. Интегралы Фурье. Преобразование Фурье: учебно-методическое пособие. Брест: БрГУ, 2011. 42 с.

[5] Нуссбаумер Г. Быстрое Преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток.

[6] Шнейдер В. Е. и др. Краткий курс высшей математики. Учеб. пособие для втузов. Москва: "Высш. школа", 1972. 640 с.

[7] Смирнов В.И. Курс высшей математики в 5-ти томах. Том 4, часть 2. Москва, 1981. 551 с.

[8] Кандидов В.П. и др. Дискретное преобразование Фурье. Учебное пособие. Москва: физический факультет МГУ, 2019. 88 с.

[9] Господариков А.П., Зацепин М.А., Колтон Г.А., Лебедев И.А., Обручева Т.С., Яковлева А.А. Высшая математика в шести томах. Том 4. Дифференциальные уравнения. Ряды. Ряды Фурье и преобразование Фурье. Дифференциальное и интегральное исчисление функций нескольких переменных. Теория поля. Санкт-Петербург, 2015.

[10] Романова Л.Д., Шаркунова Т.А., Елисеева Т.В. Интегральные преобразования. Пенза, 2015.

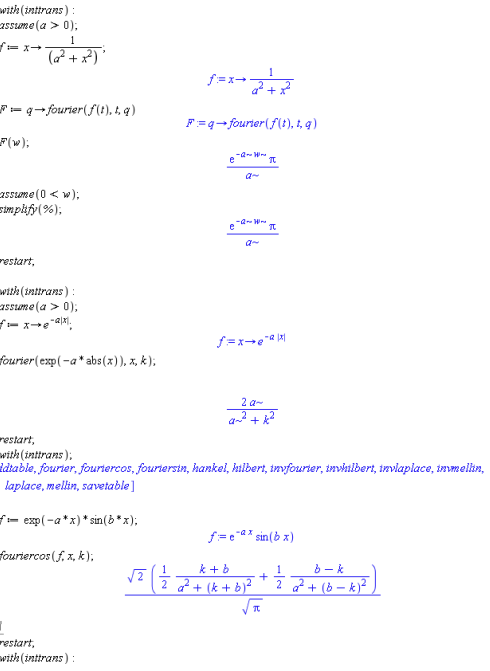
[11] Why does the Fourier transform work? An intuition. [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <https://medium.com/@swaroopkml96/why-does-the-fourier-transform-workan-intuition-879923bce418>

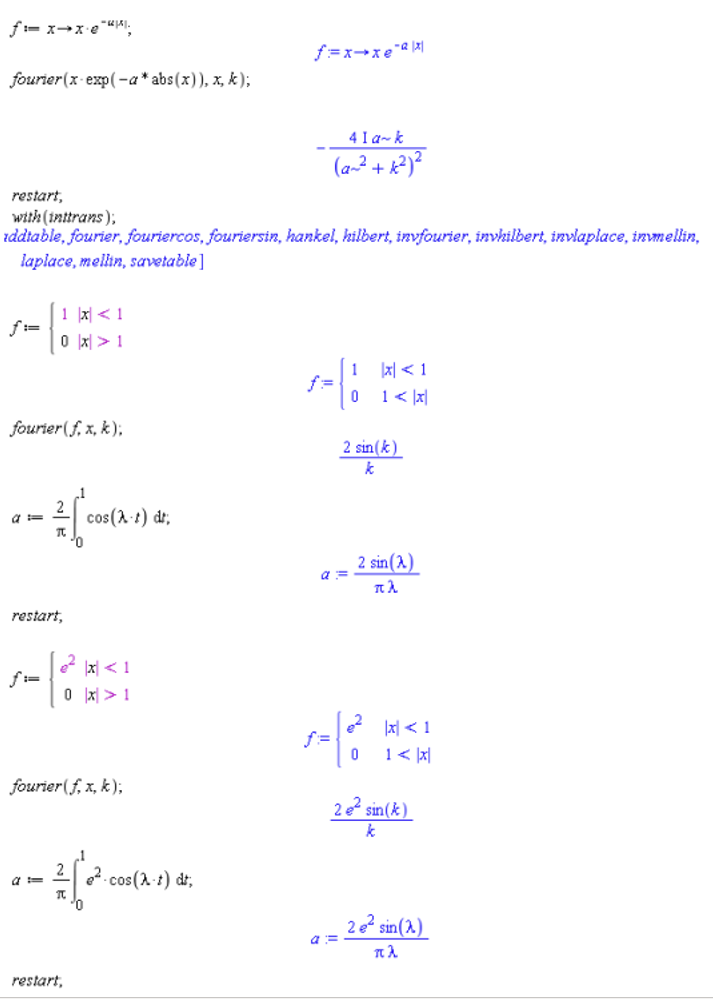
[12] An Interactive Guide To The Fourier Transform [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <https://betterexplained.com/articles/an-interactive-guide-to-the-fouriertransform/>

[13] Maplesoft Online Help System [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <https://www.maplesoft.com/support/help/>

[14] Proglib [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <https://proglib.io/>

**Приложение**

****

****